**B. RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN**

**DẠNG 1: RÚT GỌN, TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIẾN**

**Cách giải:** Cần lưu ý một số kiến thức sau

- Đặt điều kiện để biểu thức có nghĩa (nếu bài toán chưa cho) trước khi rút gọn

- Kiểm tra xem giá trị của biến có phù hợp với ĐKXĐ hay không trước khi thay giá trị của biến vào biểu thức thu gọn

- Đôi khi có thể tính  hoặc x trước khi thay vào biểu thức rút gọn

- Kết quả cuối cùng của biểu thức rút gọn phải có mẫu dương và đã được khử mẫu hoặc trục căn thức ở mẫu.

**Bài 1:**

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của  khi 

**Lời giải**

a) Ta có 

Điều kiện xác định: 



b) Lại có 

Vậy  khi 

**Bài 2:**

Cho biểu thức 

a) Tìm điều kiện của a, b để M xác định và rút gọn M

b) Tính giá trị của M khi  và 

**Lời giải**

a) Điều kiện xác định 

b) Ta có 



c) Ta có 



Vậy  khi  và 

**Bài 3:** *Chuyên Quảng Ninh, năm 2017*

 Cho biểu thức 

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A khi 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 

b) Ta có





Vậy  khi 

**Bài 4:** Chuyên Thừa Thiên Huế, năm 2017

 Cho biểu thức . Tính giá trị của A khi 

**Lời giải**

Cách 1: Chia tử cho mẫu

Cách 2: Ta có 









**Bài 5:** *Học sinh giỏi huyện Hằng Hóa, năm 2019 - 2020*

 Cho biểu thức 

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của biểu thức P khi 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 



b) Ta có



(vì 

Thay  vào biểu thức thu gọn ta được 

**Bài 6:** *Học sinh giỏi huyện Quan Sơn và Thanh Xuân, năm 2019 - 2020*

 Cho biểu thức 

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi 

**Lời giải**

a) Ta có 

b) Ta có 

Vậy 

**Bài 7:** *Học sinh giỏi Ba Đình, năm 2019 - 2020*

 Cho biểu thức 

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 



b) 



Thay  vào biểu thức A ta được 

**Bài 8:** *Học sinh giỏi Bắc Từ Liêm, năm 2017 - 2018*

 Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 



b) Với  ta có  do đó 

mà 

Vậy 

**Bài 9:** *Chuyên Bắc Ninh, năm học 2017 – 2018 (Học sinh chuyên Toán – Tin)*

 Cho biểu thức  và  với 

a) Rút gọn biểu thức P và Q

b) Tính tất cả các giá trị của x để 

**Lời giải**

a) Với  ta được  và 

b) Khi đó



Kết hợp với điều kiện xác định ta được  thỏa mãn điều kiện.

**Bài 10:**

*Chuyên Bắc Ninh, năm học 2014 – 2015 (Học sinh chuyên Toán – Tin)*

 Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính số chính phương x sao cho  là số nguyên

**Lời giải**

a) Ta có





b) Ta có  là ước của 2 gồm 

.

**Bài 11:**

*Học sinh giỏi Tỉnh Bình Phước, năm học 2018 - 2019*

 Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi 

**Lời giải**

a) Điều kiện xác định: 

Đặt 

Khi đó 





b) Ta có 



Vậy 

**Bài 12:**

*Học sinh giỏi Tỉnh Thái Bình, năm học 2018 - 2019*

 Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi  và 

**Lời giải**

a) Ta có

 



Với  thì 

b) Ta có 

 (thỏa mãn điều kiện)

Thay  vào P ta được  vậy 

**Bài 13:** *Chuyên Ninh Bình, năm học 2017*

 Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi 

**Lời giải**

a) Ta có 



b) Tính được 

**Bài 14:** *Chuyên Trà Vinh, năm học 2018 - 2019*

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn Q

b) Xác định giá trị của Q khi 

**Lời giải**

a) Ta có 



Vậy  với 

b) Thay  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức Q ta được:



**Bài 15:** *Chuyên Toán Bến Tre, năm học 2018 - 2019*

Cho biểu thức  với  là hai số thực dương

a) Rút gọn biểu thức 

b) Xác định giá trị của biểu thức P khi  và 

**Lời giải**

a) Ta có 



b) .

**Bài 16:** Học sinh giỏi cấp Tỉnh Lạng Sơn, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của biểu thức  với 

**Lời giải**

a) Điều kiện 









Vậy  với 

b) Với 

 (thỏa mãn)

Thay vào biểu thức  ta được 

Vậy  khi .

**Bài 17:** Học sinh giỏi cấp Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu, năm học 2020 - 2021

1) Rút gọn biểu thức  với 

2) Tính giá trị của biểu thức  với 

**Lời giải**

1) Với 





.

2) Áp dụng công thức: 







**Bài 18:** HSG Huyện Gia Lâm vòng 1, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của  khi 

**Lời giải**

a) 

Đặt 

Như thế 



b) Ta có 

Vậy 

b) Ta có các bđt phụ sau (rất quen thuộc nên ta không chứng minh lại)

Với ba số thực dương 

(dấu bằng khi )

Và (dấu bằng khi )

Áp dụng ta có





Vậy 

**Bài 19:** HSG Hà Đông, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Chứng minh rằng nếu biểu thức sau khi rút gọn của  là số nguyên tố và  là số nguyên thì  cũng là số nguyên tố

b) Tính giá trị của biểu thức  biết 

**Lời giải**

1. ĐKXĐ: hoặc 



Nếu thì



Nếu thì



1. Nếu thì  không là số nguyên tố

Nếu  nguyên tố khi  là số nguyên

Vì nên  nguyên khi thuộc ước của 2

Mà nên 

Với thì là số nguyên tố

Vậy P là số nguyên tố khi cũng là số nguyên tố

1. Đặt (do )

. Thay vào 

**Bài 20:** HSG Huyện Nga Sơn, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của , biết 

**Lời giải**

a)Với  ta có:











Vậy  với 

b)Ta có: 









Thay ( thỏa mãn  ) vào biểu thức  ta được:



Vậy  khi 

**Bài 21:** HSG Yên Định, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của , biết 

**Lời giải**

a) Với , ,  ta có:















.

Vậy  khi , , .

b) Khi







 (thỏa mãn ĐKXĐ).

Ta có .

Vậy .

**DẠNG 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Xét bài toán: 

a) Rút gọn 

b) Tìm  để  (m là hằng số) hoặc 

2. Giải bài toán

a) Rút gọn

- Đặt điều kiện để  có nghĩa

- Thực hiện rút gọn 

b) Tìm : Giải phương trình

**B. Bài tập**

**Bài 1:** *Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định, năm 2015*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị của  để 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 

b)  (thỏa mãn điều kiện)

Vậy 

**Bài 2:** *Chuyên Lào Cai, năm 2017*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm  để 

**Lời giải**

a) Điều kiện  và 

Ta có 

b)  (loại)

Vậy không có giá trị nào để .

**Bài 3:**

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm tất cả các giá trị x nguyên dương để p nhận giá trị nguyên

**Lời giải**

a) Ta có 



b) 



Vì  và 

Để  (thỏa mãn)

Vậy 

**Bài 4:** *Chuyên Sư Phạm Hà Nội, năm 2017*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị của  để 

**Lời giải**

a) Ta có 



b) Ta có  (điều kiện )



Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 5:** *Học sinh giỏi huyện Chương Mỹ vòng 2, năm học 2020*

Cho 

Tìm  nguyên để 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

; 

Khi đó 





Ta có :





TH1: 

TH2: 

TH1:  loại

TH1:  loại

Vậy với  hoặc  thì 

**Bài 6:** *Học sinh giỏi huyện Đức Cơ, năm học 2019*

Cho  Tìm  sao cho 

**Lời giải**

Ta có  xác định khi 



Lại có  xác định khi 



Ta có 

Kết hợp với điều kiện ta được 

Vậy  khi 

**Bài 7:** *Học sinh giỏi huyện Như Thanh, năm học 2019*

Cho biểu thức 

a) Tìm điều kiện của  để  có nghĩa và rút gọn 

b) Tìm x để biểu thức  nhận giá trị bằng 2

c) Tính giá trị của biểu thức  tại 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 



Vậy  với 

b) Ta có  (thỏa mãn)

(vì  với mọi x)

c) Ta có 



 (thỏa mãn)

Thay  vào A ta được: 

**Bài 8:** *Học sinh giỏi huyện Mỹ Đức và Tỉnh Lai Châu (2018-2019), năm học 2019 - 2020*

Cho  với 

a) Rút gọn 

b) Tìm các giá trị của  để 

c) So sánh  và 

**Lời giải**

a) Ta có 



b) Với 

Ta có 

Vì  (thỏa mãn)

Vậy  khi 

c) Vì 

Dấu “=” xả ra khi .

Vậy 

**Bài 9:** *HSG Tỉnh Sóc Trăng, năm học 2020 - 2021*

Cho 

a) Rút gọn 

b) Tìm các giá trị của  để 

**Lời giải**

a) Điều kiện xác định: 











b) Ta có:  













 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với  thì .